

SCHÉMAS ÉLECTROMAGNETISME

Nicolas CHIREUX

SCHÉMAS ÉLECTROMAGNETISME

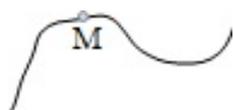
Chapitre 1

Outils mathématiques de la théorie des champs

1.1 Rappels sur les champs

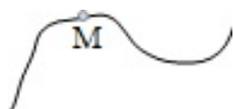
1.1.1 Définition

1.1.2 Lignes de champ - Tubes de champ



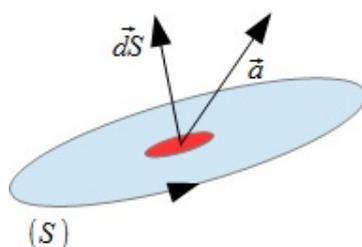
Soit un champ vectoriel \vec{a} . On appelle **ligne de champ** l'ensemble des points M constituant une courbe (C) tangente en tout point à \vec{a} .

1.1.3 Circulation - Flux



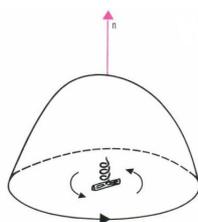
La circulation \mathcal{C} d'un champ vectoriel \vec{a} le long de la courbe orientée (C) est l'intégrale curviligne

$$\mathcal{C} = \int_{(C)} \vec{a} \cdot d\vec{M} \quad (1.1)$$



Le flux Φ d'un champ vectoriel \vec{a} à travers une surface orientée S est

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (1.2)$$



On rappelle qu'une surface est orientée par le contour sur lequel elle s'appuie suivant la règle du tire-bouchon représentée ci-contre. On peut aussi utiliser la main droite : on place l'extérieur de la main sur le contour, les doigts dans le sens de parcours du contour et la normale positive à la surface est donnée par le pouce.

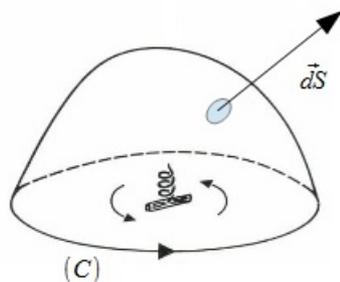
FIGURE 1.1 – Orientation d'une surface

1.2 Opérateurs agissant sur les champs

1.3 Analyse vectorielle

1.4 Transformation des domaines d'intégration

1.4.1 Théorème de Stokes



Soit un contour orienté fermé (C) et une surface (S) quelconque s'appuyant sur ce contour. (S) est orientée suivant la convention habituelle dite du "tire-bouchon".

Soit $\vec{a}(\vec{r}, t)$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles sont bornées - ce sera souvent le cas en physique -.

FIGURE 1.2 – Théorème de Stokes

1.4.2 Théorème d'Ostrogradski

Énoncé

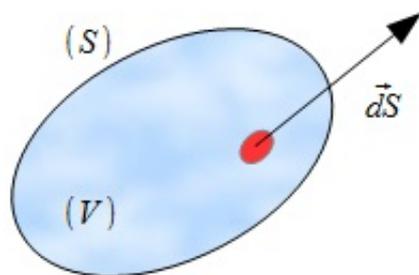


FIGURE 1.3 – Théorème d'Ostrogradski

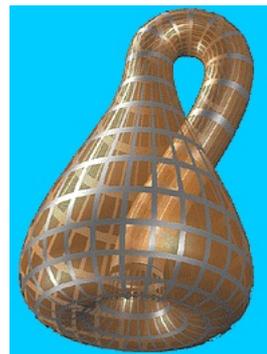


FIGURE 1.4 – Bouteille de Klein

Formule du gradient - Vecteur surface

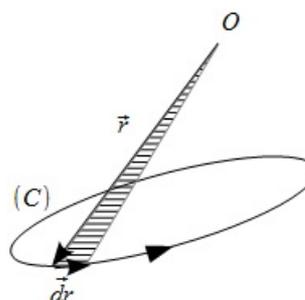
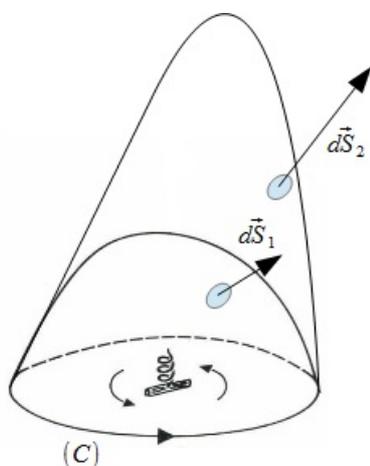
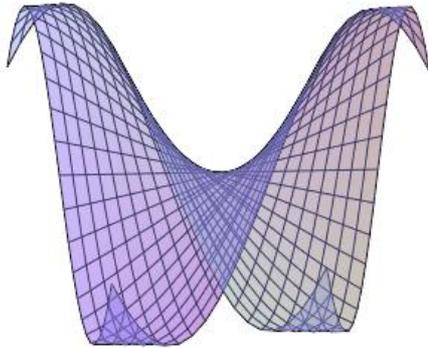


FIGURE 1.5 – Vecteur surface

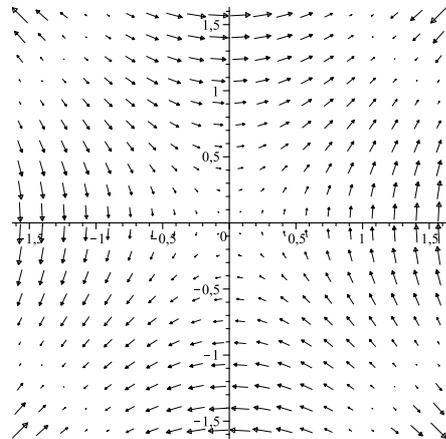
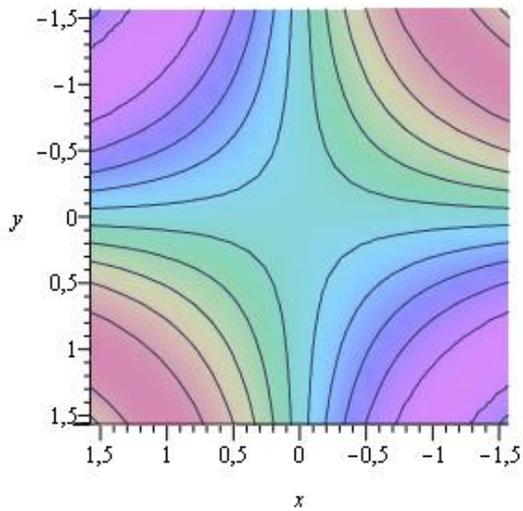
1.5 Définition intrinsèque des opérateurs

1.5.1 Gradient



Nous pourrions citer aussi l'exemple des lignes de plus grande pente qui sont tangentes au gradient de l'altitude et perpendiculaires aux lignes de niveau. On a tracé ci-après en intensité (à gauche) et vectoriellement le champ de gradient (à droite)

FIGURE 1.6 – Exemple de la fonction $\sin(x.y)$ simulant un col



1.5.2 Divergence

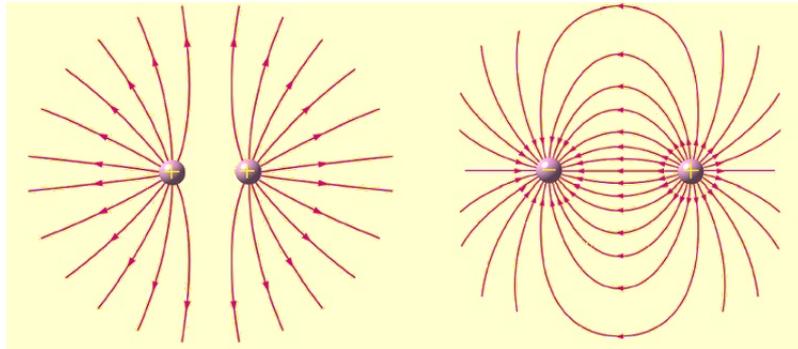


FIGURE 1.7 – Lignes de champ de charges ponctuelles

1.5.3 Rotationnel

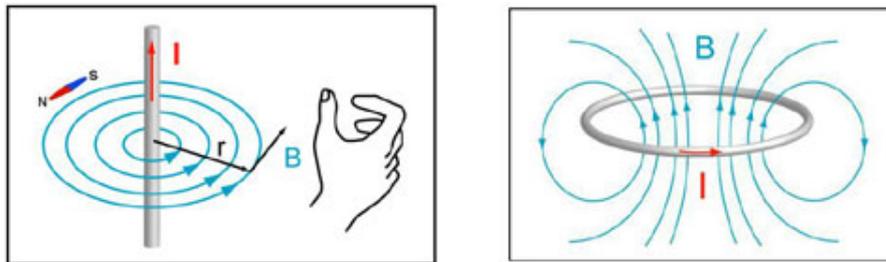


FIGURE 1.8 – Lignes de champ \vec{B} avec un fil ou une spire

Chapitre 2

Introduction à l'électromagnétisme

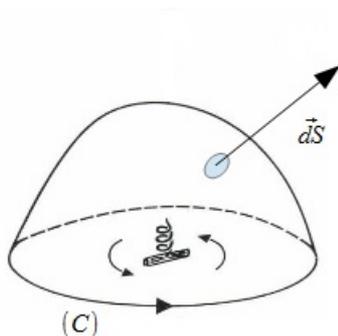
2.1 Historique

2.2 Distributions de charges et de courants

2.2.1 Charges et courants électriques

Densité de charge

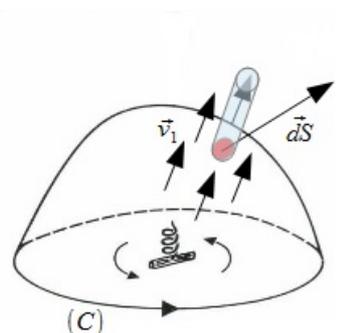
Densité de courant



Dans un référentiel $[R]$ donné, l'intensité i d'un courant à travers une surface orientée S est la charge électrique q qui traverse S par unité de temps mesurée en ampères A . On rappelle que $1A = 1C.s^{-1}$. i dépend du temps et de S donc du contour fermé sur lequel s'appuie S

$$i = i_S(t) = \frac{dq}{dt} \quad (2.1)$$

Soient les porteurs q_1 de densité particulaire n_1 animés de la vitesse \vec{v}_1 par rapport au référentiel $[R]$.



Durant dt , la charge traversant $d\vec{S}$ est contenue dans un cylindre de base dS et de génératrice $\vec{v}_1 dt$. Elle vaut :

$$dq_1 = n_1 q_1 \vec{v}_1 dt \cdot d\vec{S} \quad (2.2)$$

Soit sur toute la surface

$$dq_1 = \iint_{(S)} n_1 q_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{S} dt \quad (2.3)$$

S'il y a plusieurs types de porteurs, le raisonnement est le même pour chaque type de porteurs. Il suffit de sommer sur tous les porteurs différents ensuite. En permutant la sommation sur les porteurs et l'intégrale double qui ne porte pas sur les mêmes variables, nous obtenons

$$i = i_S(t) = \frac{dq}{dt} = \sum_{i \text{ types de porteurs}} \frac{dq_i}{dt} = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{où} \quad \vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \quad (2.4)$$

2.2.2 Équation locale de conservation de la charge

2.2.3 Régime permanent - Intensité

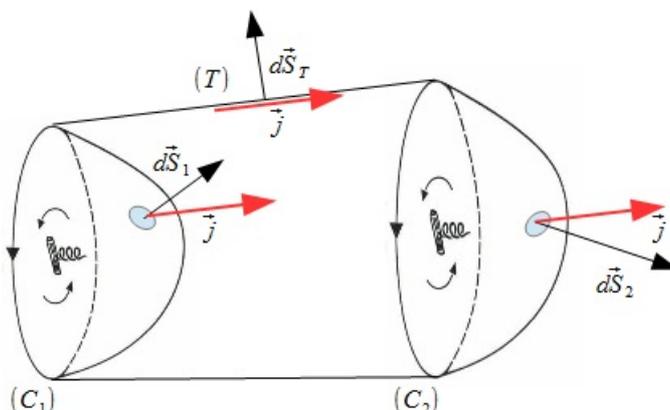
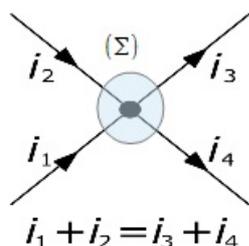


FIGURE 2.1 – Tube de courant

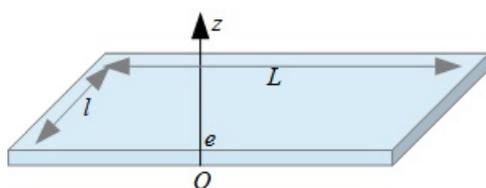


Rem : le caractère conservatif de l'intensité permet de démontrer la lois des nœuds vue en électricité. Il suffit dans ce cas de prendre une surface fermée (Σ) entourant le nœud. On a alors

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0 \quad (2.5)$$

2.2.4 Schématisation des distributions de charges

Nous avons défini au cours de ce chapitre le couple $[\rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)]$ qui représente le couple densités volumiques -charges et courant -.



Si les charges sont réparties sur une épaisseur faible devant les dimensions latérales du système, nous aurons intérêt à définir un nouveau couple : le couple densités surfaciques $[\sigma(\vec{r}, t), \vec{j}_s(\vec{r}, t)]$ avec

$$\sigma(\vec{r}, t) = \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^e \rho(\vec{r}, t) dz \quad \vec{j}_s(\vec{r}, t) = \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^e \vec{j}(\vec{r}, t) dz \quad (2.6)$$

Si maintenant les charges sont réparties sur une seule dimension significative, nous définirons le couple densités linéiques $[\lambda(\vec{r}, t), I(\vec{r}, t)\vec{dl}]$.

2.3 Postulats de l'électromagnétisme

2.3.1 Champ électromagnétique - Force de Lorentz

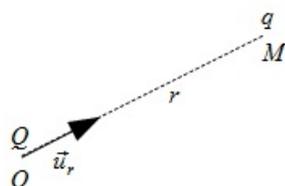
2.3.2 Expression volumique de la force de Lorentz

Chapitre 3

Electrostatique

3.1 Champ électrostatique créé par une distribution de charges

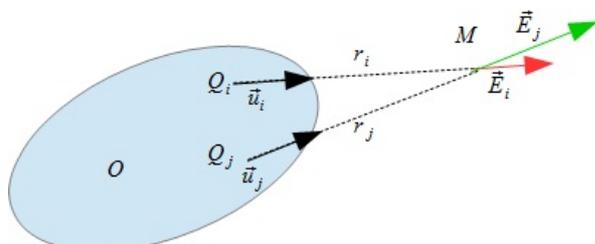
3.1.1 Champ créé par une charge ponctuelle



Soit une charge Q placée en O . Si nous plaçons une deuxième charge en M distant de r de O , Coulomb a établi que celle-ci subit une force de la part de la charge Q

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (3.1)$$

3.1.2 Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles



Dans le cas d'une distribution de N charges Q_i placées en divers points P_i d'un volume donné, nous allons procéder par superposition. Alors le champ créé en M sera

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_i \vec{M}}{P_i M} \quad (3.2)$$

3.1.3 Cas d'une distribution continue

3.2 Potentiel électrostatique créé par une distribution de charges

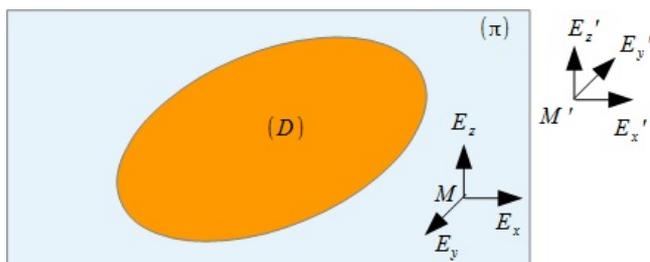
3.3 Théorème de Gauss

3.4 Calcul de champs classiques dans des distributions à haut degré de symétrie

3.4.1 Étude des symétries

La première étape consiste à trouver la direction du champ électrique. Pour cela nous allons utiliser le principe de Curie qui postule que *dans une expérience de physique, les effets présentent au moins les mêmes symétries que les causes.*

Plan de symétrie



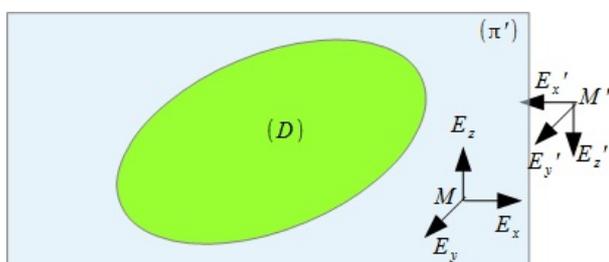
Soit \mathcal{D} une distribution de charges admettant un plan de symétrie (π_s) . Comme le champ électrique ne dépend pas de l'orientation de l'espace car c'est un vecteur polaire, nous avons pour deux points M et M' symétriques par rapport à (π_s) :

$$\vec{E}(M') = \mathcal{S}_{Sym}[\vec{E}(M)] \quad (3.3)$$

Si $M \in (\pi_s)$, il est son propre symétrique. Alors $E_y = 0$ nécessairement.

Le champ \vec{E} en un point M appartenant aux plans de symétrie de la distribution de charges \mathcal{D} appartient aussi à ces plans

Plan d'antisymétrie



Soit \mathcal{D} une distribution de charges admettant un plan d'antisymétrie (π_a) . Comme le champ électrique ne dépend pas de l'orientation de l'espace car c'est un vecteur polaire, nous avons pour deux points M et M' symétriques par rapport à (π_a) :

$$\vec{E}(M') = \mathcal{S}_{Antisym}[\vec{E}(M)] = -\mathcal{S}_{Sym}[\vec{E}(M)] \quad (3.4)$$

Si $M \in (\pi_a)$, il est son propre symétrique. Alors $E_x = E_z = 0$ nécessairement.

Le champ \vec{E} en un point M appartenant aux plans d'antisymétrie de la distribution de charges \mathcal{D} est perpendiculaire à ces plans.

Rem : le plan de symétrie doit être un plan de symétrie géométrique de \mathcal{D} et **contenir le point M !**

Rem : le plan d'antisymétrie doit être un plan de symétrie géométrique de \mathcal{D} qui change le signe des charges dans l'opération de symétrie. **Il doit aussi contenir le point M !**

3.4.2 Invariances

3.4.3 Méthode de calcul

Si la distribution présente un haut degré de symétrie (donc en général si le champ ne dépend que d'une seule variable d'espace), on peut chercher à appliquer le théorème de Gauss.

Pour cela, il faut trouver une surface fermée qui rende élémentaire le calcul du flux de \vec{E} . Ce sera donc une surface sur laquelle le module du champ électrique est constant.

Si on ne peut constituer une surface fermée en respectant cette condition, on la fermera en y adjoignant des morceaux de surface tels que $\vec{E} \perp d\vec{S}$. On comptera positivement les flux sortants de S .

Dans tous les autres cas, il faudrait faire un calcul direct à l'aide de la loi de Coulomb. L'étude préalable des symétries permettra le plus souvent de réduire le calcul à une ou deux intégrales simples. Il ne faut donc pas oublier de **projeter** \vec{E} sur les directions où il sera non nul **avant de faire les intégrations**. Ce type de calculs est hors programme.

3.4.4 Champs classiques

Sphère pleine

Soit une sphère de centre O , de rayon R , portant la charge Q uniformément répartie en volume.

Cela correspond à une densité volumique de charge $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

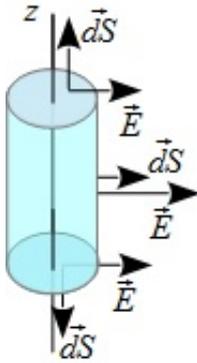
Par symétrie : les plans $[M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta]$ et $[M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi]$ sont plans de symétrie d'où $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$

Par invariance : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

La surface de Gauss est une sphère centrée en O et passant par M : elle est fermée et telle que le module de \vec{E} soit constant puisqu'il ne dépend que de r .

- $r > R$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ et $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ car V est nul à l'infini
- $r < R$: $\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{e}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\vec{e}_r$ et $V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$ car V est continu en $r = R$

Fil infini



Par symétrie : les plans $[M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta]$ et $[M, \vec{e}_r, \vec{e}_z]$ sont plans de symétrie d'où $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{e}_r$

Par invariance : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

La surface de Gauss sera un cylindre de hauteur h quelconque et ayant pour base un cercle de rayon r : la surface passe comme toujours par le point où on cherche le champ !

Le module de \vec{E} est constant sur la surface latérale. On ferme la surface avec les deux couvercles tels que $\vec{E} \perp d\vec{S}$.

FIGURE 3.1 – Fil infini chargé avec une densité linéique de charges λ et sa surface de Gauss

L'application du théorème de Gauss donne

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \underbrace{\iint_{couver_{bas}} E(r)\vec{e}_r \cdot (-d\vec{S})\vec{e}_z}_{=0} + \underbrace{\iint_{surface_{lat}} E(r)\vec{e}_r \cdot (d\vec{S})\vec{e}_r}_{=2\pi r h E(r)} + \underbrace{\iint_{couver_{haut}} E(r)\vec{e}_r \cdot (d\vec{S})\vec{e}_z}_{=0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

D'où

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}$$

où a est une constante arbitraire

Rem : on ne peut pas dire que V est nul à l'infini ici puisque la distribution de charge n'est pas d'extension finie.

Rem : nous pouvons utiliser le même type de calcul pour le cylindre infini en distinguant toutefois les deux cas : M intérieur au cylindre et M extérieur au cylindre.

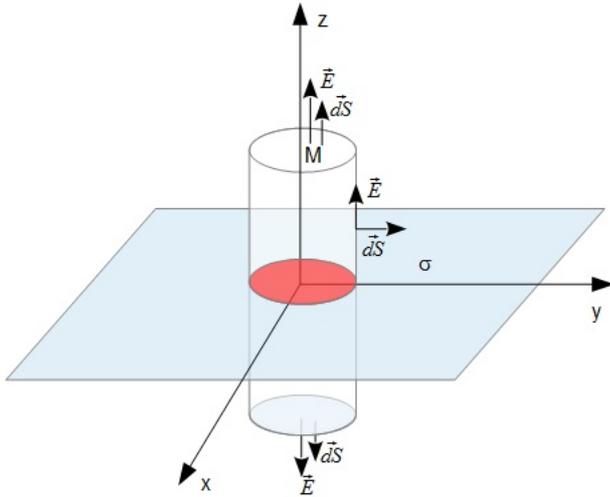
Plan infini

Soit un plan infini portant la densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

Par symétrie : les plans $[M, \vec{e}_x, \vec{e}_z]$ et $[M, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ sont plans de symétrie d'où $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{e}_z$

Par invariance : $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$

La surface de Gauss sera un cylindre de hauteur $2z$ et ayant pour base une surface S quelconque. Ce cylindre est symétrique par rapport au plan xOy . Le module de \vec{E} est constant sur les couvercles.



Alors on obtient :

- $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ et $V = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$ avec V nul en $z = 0$
- $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ et $V = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$ avec V nul en $z = 0$

FIGURE 3.2 – Plan infini chargé avec une densité surfacique de charges σ et sa surface de Gauss

On ferme la surface avec la surface latérale telle que $\vec{E} \perp d\vec{S}$.

Rem. : on ne peut pas dire que V est nul à l'infini ici puisque la distribution de charge n'est pas d'extension finie.

Champ au voisinage de l'axe d'une spire de rayon a

Soit une spire de rayon a , d'axe z , portant la charge linéique λ . Eu égard aux symétries, il faut faire un calcul direct. On trouve pour un point M appartenant à l'axe Oz :

$$V = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} \quad \vec{E} = \frac{\lambda a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad (3.5)$$

Le champ au voisinage de l'axe a deux composantes : une composante axiale qu'on considérera égale à celle obtenue pour un point de l'axe et une composante radiale qu'on trouvera en appliquant le théorème de Gauss à un petit cylindre de longueur dz et de rayon r petit devant z .

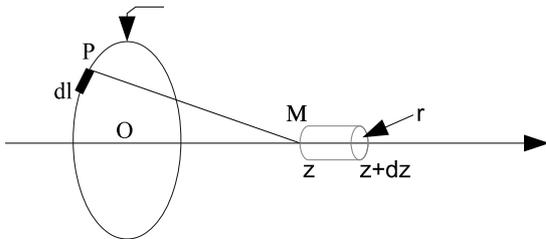


FIGURE 3.3 – Spire chargée avec une densité linéique de charges λ

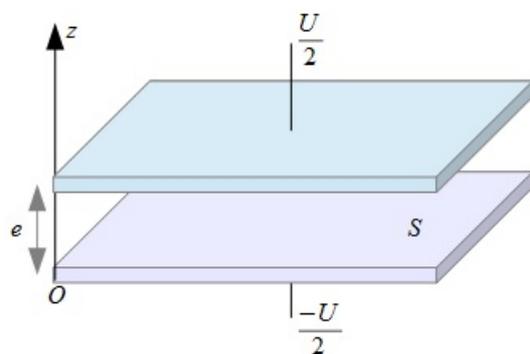
3.4.5 Continuités

A la traversée d'une distribution de charges, le potentiel et le champ électrique se comportent différemment. Les diverses continuités sont rappelées ci-dessous.

Distribution	Champ électrique \vec{E}	Potentiel V
Volumique ρ	Continu	Continu
Surfacique σ	Discontinu <i>Relation de passage</i> $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$	Continu
Linéique λ	Discontinu	Discontinu

3.5 Modèle de condensateur

3.5.1 Dispositif



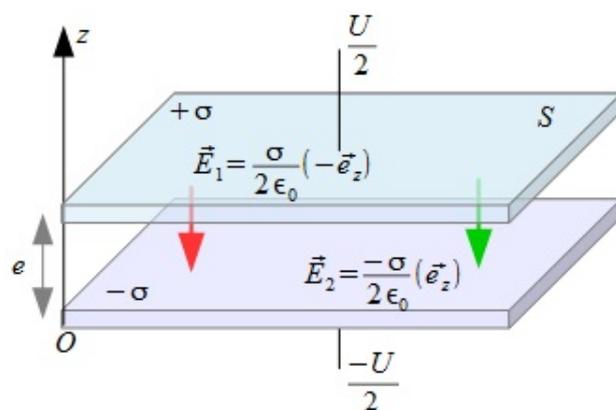
Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices - ici des plans de surface S - séparés par une distance e . L'espace inter armatures peut être vide comme ici ou rempli d'un isolant de permittivité relative ϵ_r .

Les armatures sont reliées à un générateur qui impose une d.d.p. U ce qui entraîne l'établissement d'un champ électrique \vec{E} entre les armatures. Des charges opposées s'accumulent alors sur les armatures.

FIGURE 3.4 – Condensateur plan $e \ll Dim.lat.$

Notre approximation consiste à considérer l'écartement e comme très petit devant les dimensions latérales des plans conducteurs : nous pourrions donc raisonner comme si les plans étaient infinis.

3.5.2 Calcul du champ \vec{E}



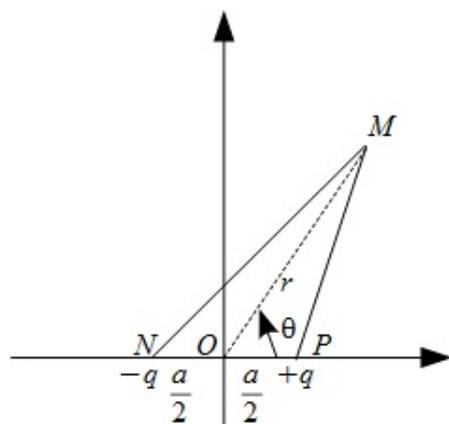
Entre les armatures, nous aurons

$$\begin{aligned}\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\vec{e}_z) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z \\ \Leftrightarrow \vec{E} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z\end{aligned}$$

FIGURE 3.5 – Condensateur plan

3.6 Dipôle électrostatique

3.6.1 Définition



Un dipôle électrostatique est constitué par deux charges ponctuelles $-q$ au point N et $+q$ au point P avec $a = NP$.

Nous nous placerons loin du dipôle soit $r \gg a$: le dipôle apparaîtra comme quasi-ponctuel depuis M .

FIGURE 3.6 – Dipôle électrostatique

3.6.2 Lignes de champ - Equipotentielles

On peut faire le tracé des lignes de champ.

A partir de

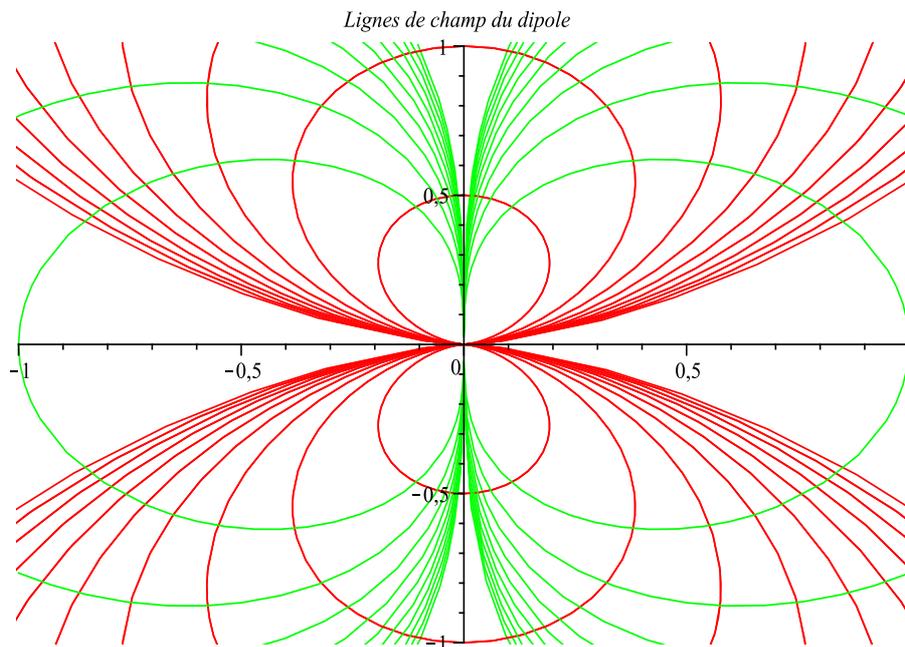
$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \quad (3.6)$$

on a

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta \cdot d\theta}{\sin\theta} \Leftrightarrow r = r_0 \sin^2 \theta \quad (3.7)$$

Les équipotentielles sont données par $r = C \cdot \sqrt{|\cos\theta|}$.

On obtient alors le tracé suivant où les équipotentielles sont en vert et les lignes de champ en rouge.

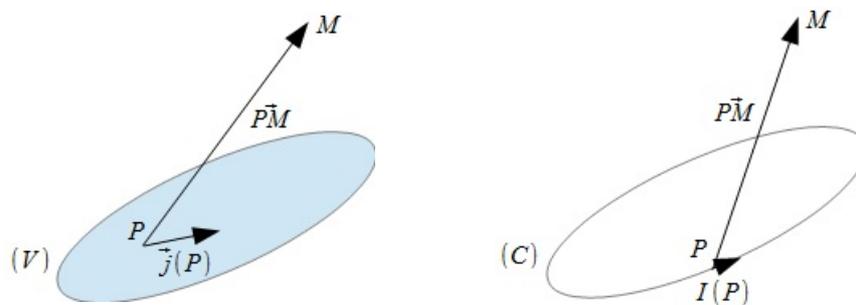


3.6.3 Energie potentielle et actions subies par un dipôle dans un champ extérieur

Chapitre 4

Magnétostatique

4.1 Champ magnétique créé par une distribution de courant (hors programme)



4.2 Théorème d'Ampère

4.2.1 Flux du champ magnétique

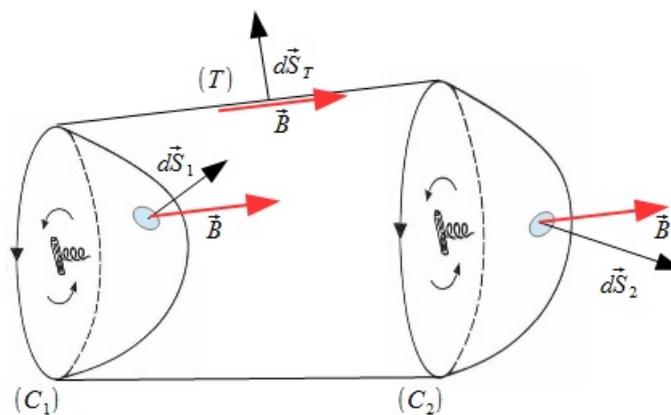
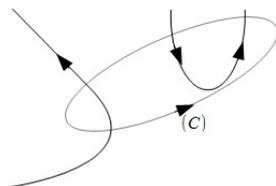


FIGURE 4.1 – Tube de champ magnétique

4.2.2 Théorème d'Ampère



Nous considérerons une distribution de courants. Nous nous proposons de calculer la circulation du champ magnétique créé par cette distribution sur un contour orienté (C) donnée :

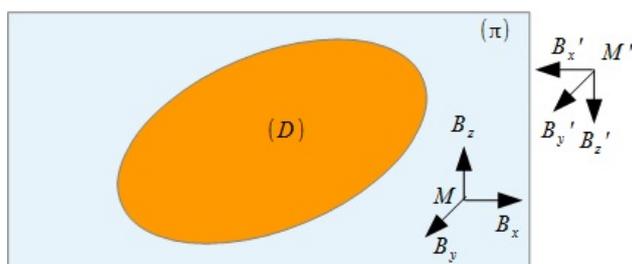
- soit les courants traversent toute surface (S) s'appuyant sur (C) et leur contribution à la circulation sera $\mu_0 I_{\text{enlacé}}$.
- soit il existe au moins une surface (S) s'appuyant sur (C) que les courants ne traversent pas et leur contribution à la circulation sera nulle

4.3 Calcul de champs classiques dans des distributions à haut degré de symétrie

4.3.1 Étude des symétries

La première étape consiste à trouver la direction du champ magnétique. Pour cela nous allons utiliser le principe de Curie qui postule que *dans une expérience de physique, les effets présentent au moins les mêmes symétries que les causes*.

Plan de symétrie



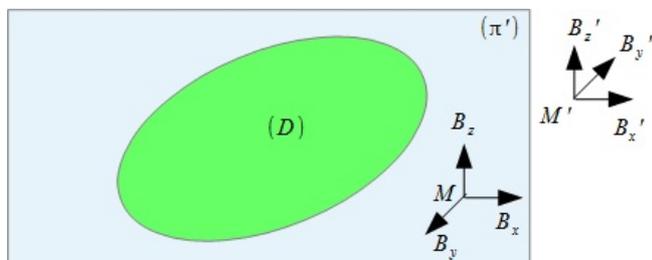
Soit \mathcal{D} une distribution de courants admettant un plan de symétrie (π_s). Comme le champ magnétique dépend de l'orientation de l'espace - via le produit vectoriel, voir la loi de Biot et Savart - car c'est un vecteur axial, nous avons pour deux points M et M' symétriques par rapport à (π_s) :

$$\vec{B}(M') = -\mathcal{S}_{Sym}[\vec{B}(M)] = \mathcal{S}_{Antisym}[\vec{B}(M)] \quad (4.1)$$

Si $M \in (\pi_s)$, il est son propre symétrique. Alors $B_x = B_z = 0$ nécessairement.

Le champ \vec{B} en un point M appartenant aux plans de symétrie de la distribution de courants \mathcal{D} est perpendiculaire à ces plans.

Plan d'antisymétrie



Soit \mathcal{D} une distribution de courants admettant un plan d'antisymétrie (π_a). Comme le champ magnétique dépend de l'orientation de l'espace - via le produit vectoriel, voir la loi de Biot et Savart - car c'est un vecteur axial, nous avons pour deux points M et M' symétriques par rapport à (π_a) :

$$\vec{B}(M') = -\mathcal{S}_{Antisym}[\vec{B}(M)] = \mathcal{S}_{Sym}[\vec{B}(M)] \quad (4.2)$$

Si $M \in (\pi_a)$, il est son propre symétrique. Alors $B_y = 0$ nécessairement.

Le champ \vec{B} en un point M appartenant aux plans d'antisymétrie de la distribution de courants \mathcal{D} appartient aussi à ces plans

Rem : le plan de symétrie doit être un plan de symétrie géométrique de \mathcal{D} et contenir le point M . De plus il ne doit pas changer le sens des courants.!

Rem : le plan d'antisymétrie doit être un plan de symétrie géométrique de \mathcal{D} qui change le sens des courants dans l'opération de symétrie. Il doit aussi contenir le point M . De plus il doit changer le sens des courants.!

4.3.2 Invariances

La deuxième étape consiste trouver les variables d'espace dont dépend le champ magnétique.

Si la répartition est invariante par translation le long d'un axe alors \vec{B} est invariant le long de cet axe.

Si la distribution est invariante par rotation autour d'un axe alors le champ \vec{B} ne dépend pas de l'angle repérant la rotation autour de cet axe.

4.3.3 Méthode de calcul

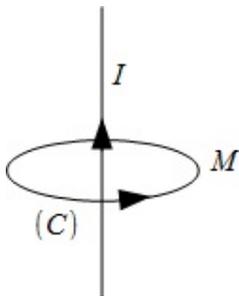
Si la distribution présente un haut degré de symétrie (donc en général si le champ ne dépend que d'une seule variable d'espace ou deux à la rigueur), on peut chercher à appliquer le théorème d'Ampère. Pour cela, il faut trouver un contour fermé qui rende élémentaire le calcul de la circulation de \vec{B} . Ce sera donc un contour le long duquel le module du champ magnétique est constant.

Si on ne peut constituer un contour fermé en respectant cette condition, on le fermera en y adjoignant des morceaux de contour tels que $\vec{B} \perp d\vec{l}$. On comptera positivement les courants traversant la surface s'appuyant sur le contour orienté (C) dans le sens fixé par l'orientation de (C) (règle du tire bouchon)

Dans tous les autres cas, il faudrait faire un calcul direct -hors programme - à l'aide de la loi de Biot et Savart. Dans ce cas, l'étude préalable des symétries permettra le plus souvent de réduire le calcul à une ou deux intégrales simples. Il ne faut donc pas oublier de **projeter** \vec{B} sur les directions où il sera non nul **avant de faire les intégrations**. Même dans les cas où les coordonnées cartésiennes semblent judicieuses (demi-droite, segment...), un paramétrage en angle simplifiera souvent les calculs. est hors programme.

4.3.4 Champs classiques

Fil infini



Par symétrie : le plan $[M, \vec{e}_r, \vec{e}_z]$ est plan de symétrie d'où $\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$

Par invariance : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$

Le contour fermé sera un cercle de rayon r : le contour passe comme toujours par le point où on cherche le champ ! Le module de B est constant sur ce contour.

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

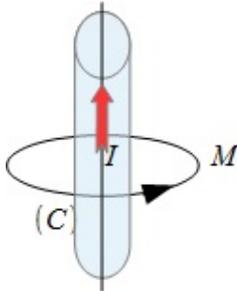
Les lignes de champ sont des cercles d'axe Oz . On retrouve ici le fait que \vec{B} est un champ de rotationnel : il s'enroule autour de ses sources.

Cylindre infini

Soit un cylindre d'axe Oz de rayon R parcouru par un courant I . Il faut ici envisager deux cas suivant que le point M est placé à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre. Soit $j = \frac{I}{\pi R^2}$ le vecteur densité de courant

- si $r > R$, le courant enlacé sera $I_{\text{enlacé}} = j\pi R^2 = I$
- si $r < R$, le courant enlacé sera $I_{\text{enlacé}} = j\pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$

Par symétrie : le plan $[M, \vec{e}_r, \vec{e}_z]$ est plan de symétrie d'où $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$



Par invariance : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$

Le contour fermé sera un cercle de rayon r : le contour passe comme toujours par le point où on cherche le champ ! Le module de B est constant sur ce contour.

$$r > R : \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (4.3)$$

$$r < R : \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta \quad (4.4)$$

Les lignes de champ sont toujours des cercles d'axe Oz . On retrouve ici le fait que \vec{B} est un champ de rotationnel : il s'enroule autour de ses sources.

Champ au voisinage de l'axe d'une spire de rayon R

Soit une spire de rayon R , d'axe z , parcourue par un courant I . Eu égard aux symétries, il faut faire un calcul direct -hors programme -.

On a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I d\vec{l} \wedge P\vec{M}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{IR d\theta \vec{e}_\theta \wedge (R\vec{e}_r + z\vec{e}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.5)$$

On trouve pour un point M appartenant à l'axe Oz :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

$$\text{où } \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

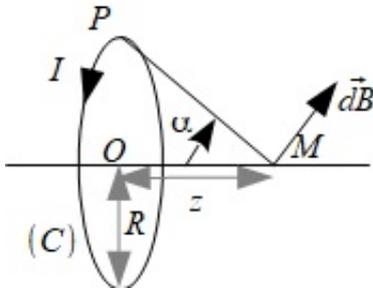


FIGURE 4.2 – Spire parcourue par un courant I

Le champ au voisinage de l'axe a deux composantes : une composante axiale qu'on considérera égale à celle obtenue pour un point de l'axe et une composante radiale qu'on trouvera en écrivant que le flux de \vec{B} à travers la surface un petit cylindre de longueur dz et de rayon r petit devant z est nul.

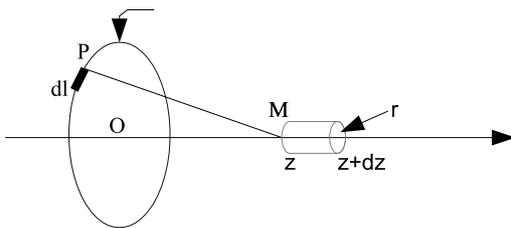


FIGURE 4.3 – Spire parcourue par un courant I

On montre alors que :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = - \iint_{\text{base en } z} B_z(z) \cdot dS + \iint_{\text{surface latérale}} B_r(r, z) \cdot dS + \iint_{\text{base en } z+dz} B_z(z+dz) \cdot dS \quad (4.6)$$

$$\text{Soit } 0 = -B_z(z) \cdot \pi r^2 + B_r(r, z) \cdot 2\pi r dz + B_z(z+dz) \pi r^2$$

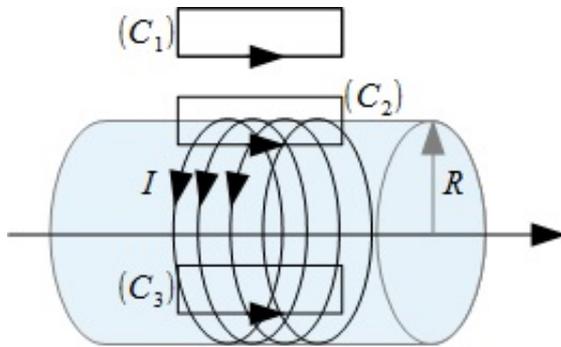
D'où

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (4.7)$$

Nous retrouvons le résultat déjà obtenu pour une spire avec une densité linéique de charge λ .

4.3.5 Solénoïde infini

Soit un solénoïde de rayon R , infiniment long, comportant n spires par unité de longueur parcourues par un courant I .



Par symétrie : le plan $[M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta]$ est plan de symétrie d'où $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$

Par invariance : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$

On va utiliser 3 contours fermés : un à l'extérieur du solénoïde, un à l'intérieur et un à cheval sur l'intérieur et l'extérieur. Le contour fermé sera un rectangle de longueur h arbitraire et dont un de côté est à r_1 de l'axe du solénoïde et l'autre à r_2 : le contour passe comme toujours par le point où on cherche le champ ! Le module de B est constant sur les côtés horizontaux et $\vec{B} \perp d\vec{l}$ sur les côtés verticaux.

FIGURE 4.4 – Solénoïde infini

On comptera positivement les courants traversant la surface s'appuyant sur les contours orientés C_i dans le sens fixé par l'orientation de C_i (règle du tire bouchon)

Sur (C_1) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 = B(r_1) \cdot h - B(r_2) \cdot h$$

Donc B_{ext} est constant. On prendra cette constante nulle pour des considérations énergétiques : en effet si cette constante n'était pas nulle, cela signifierait qu'une tranche de solénoïde infiniment fine de longueur dz pourrait stocker une énergie infinie !

En utilisant le contour (C_3) , on montre de même que B_{int} est constant.

Enfin sur (C_2) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{int} \cdot h = \mu_0 n I h$$

Soit

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_{ext} = \vec{0} \quad (4.8)$$

4.3.6 Calcul du potentiel vecteur (hors programme)

Symétries et invariances

Méthodes de calcul

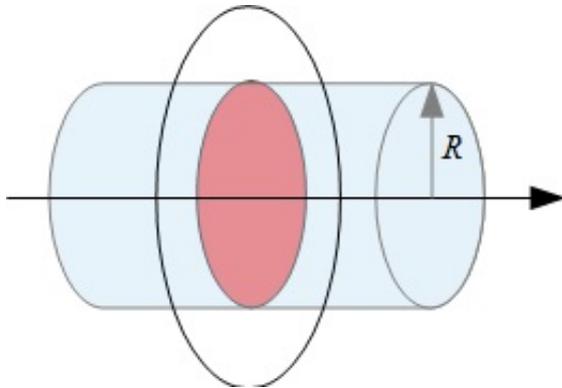


FIGURE 4.5 – Solénoïde infini

A partir de la définition

4.3.7 Continuités

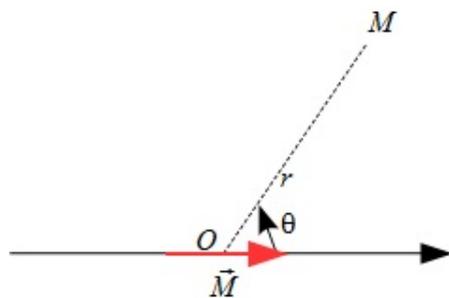
A la traversée d'une distribution de charges, le potentiel vecteur et le champ magnétique se comportent différemment. Les diverses continuités sont rappelées ci-dessous.

Distribution	Champ électrique \vec{B}	Potentiel vecteur \vec{A}
Volumique $\vec{j}(\mathbf{P})$	Continu	Continu
Surfacique $\vec{j}_s(\mathbf{P})$	Discontinu <i>Relation de passage</i> $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$	Continu
Linéique I	Discontinu	Discontinu

4.4 Dipôle magnétique

4.4.1 Moment dipolaire magnétique

4.4.2 Champ magnétique créé à grande distance



Le potentiel vecteur créé en un point M distant de r est donné par :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\varphi$$

Le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{M}}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta$$

Chapitre 5

Les équations de Maxwell

5.1 Présentation des équations

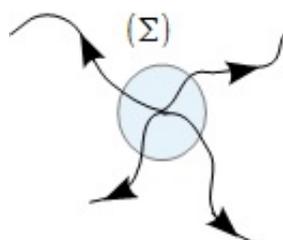
5.1.1 Equations locales et globales

5.1.2 Théorème de superposition

5.1.3 Conservation de la charge

5.1.4 Analyse physique des équations

Équation de Maxwell - Thomson



Comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, le champ magnétique n'a pas de source qui joueraient pour \vec{B} le rôle des charges pour \vec{E} .

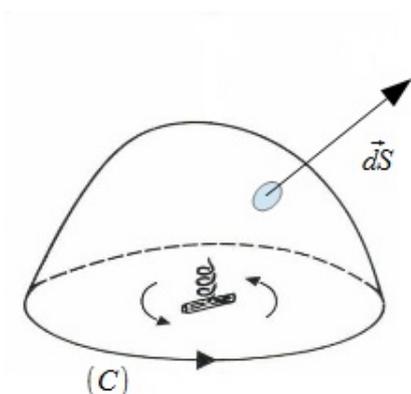
En effet, s'il existait une charge magnétique, nous aurions $\phi_{\Sigma} \neq 0$ ce qui est incompatible avec (MT) .

FIGURE 5.1 – Monopole magnétique?

Équation de Maxwell - Gauss

Équation de Maxwell - Faraday

En régime permanent $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$.



Soit une surface (S) s'appuyant sur un contour fermé orienté (C) . Cherchons la circulation de \vec{E} sur (C) . D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5.1)$$

En régime permanent \vec{E} est à circulation conservative.

FIGURE 5.2 – \vec{E} - circulation conservative

Équation de Maxwell - Ampère

5.2 Résolution des équations

5.2.1 Potentiels

5.2.2 Non unicité des potentiels

5.2.3 Équations des potentiels - Jauges

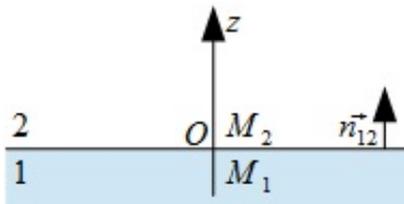
5.2.4 Régime permanent : résolution de l'équation de Laplace

Problème à symétrie cylindrique

Problème à symétrie sphérique

5.3 Conditions aux limites

5.3.1 Position du problème



Soit f une des composantes de \vec{E} ou \vec{B} .

On pose $f_1 = \lim_{z \rightarrow 0^-} f(x, y, z, t)$ et $f_2 = \lim_{z \rightarrow 0^+} f(x, y, z, t)$

On chiffrera la discontinuité par $\Delta f = f_2 - f_1$

FIGURE 5.3 – Passage entre deux milieux

5.3.2 Conditions de passage

Champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$

Champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$

5.4 Équations de Maxwell en milieu matériel (*hors programme*)

Chapitre 6

Énergie électromagnétique dans le vide

6.1 Bilan énergétique

6.1.1 Localisation de l'énergie

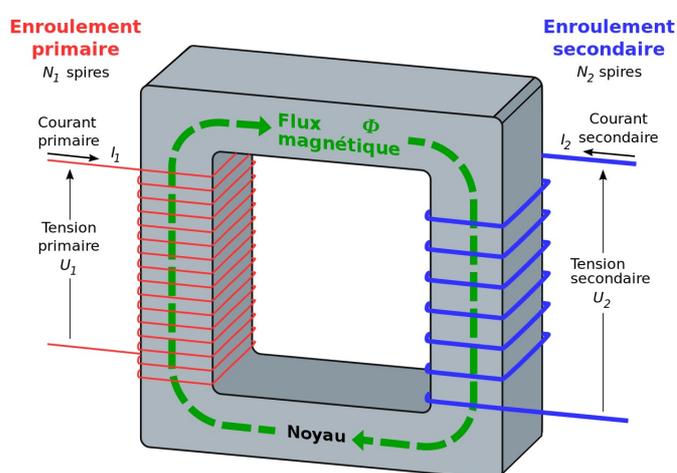
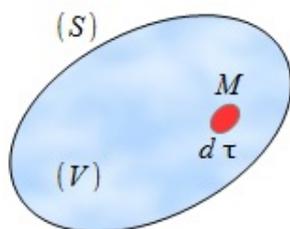


FIGURE 6.1 – Transformateur

6.1.2 Bilan local

Densité d'énergie



Soit un volume (V) fixe dans $[R]$ délimité par une surface (S). Supposons que ce volume soit caractérisé par la distribution de charges $\mathcal{D} [\rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)]$.

Plaçons ce volume dans le champ électromagnétique $[\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)]$.

Puissance de la force de Lorentz

Conservation locale de l'énergie

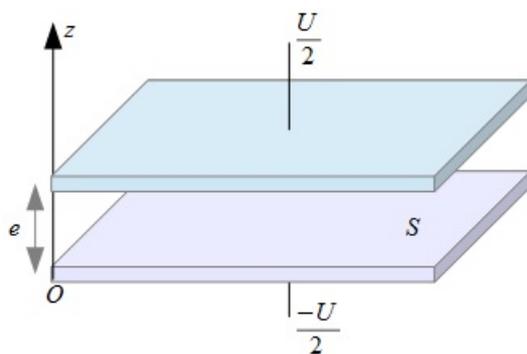
6.2 Énergie du champ électromagnétique

6.2.1 Densité d'énergie électromagnétique

6.2.2 Vecteur de Poynting

6.2.3 Exemples de bilans

Condensateur plan



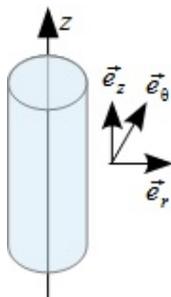
Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices - ici des plans de surface S - séparés par une distance e . L'espace inter armatures peut être vide comme ici ou rempli d'un isolant de permittivité relative ϵ_r .

Les armatures sont reliées à un générateur qui impose une d.d.p. U ce qui entraîne l'établissement d'un champ électrique \vec{E} entre les armatures. Des charges opposées s'accumulent alors sur les armatures.

FIGURE 6.2 – Condensateur plan $e \ll Dim.lat.$

Solénoïde

Puissance dissipée dans un conducteur



Soit un conducteur cylindrique de rayon a , de longueur l , de conductivité γ parcouru par un courant I . Sa résistance est $R = \frac{l}{\gamma S}$.

Le champ \vec{E} associé au courant I circulant dans le conducteur est donné par la loi d'Ohm locale soit

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = E \vec{e}_z = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \vec{e}_z \quad (6.1)$$

FIGURE 6.3 – Conducteur cylindrique

Chapitre 7

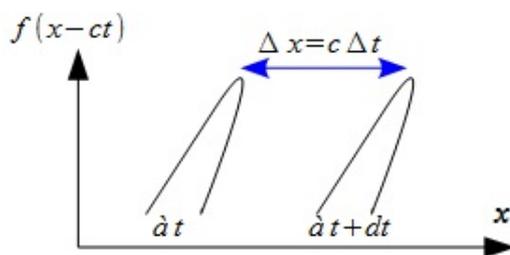
Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

7.1 Le champ électromagnétique dans le vide

7.1.1 L'équation d'onde dans le vide

7.1.2 L'OEMPP solution particulière

Résolution de l'équation d'onde



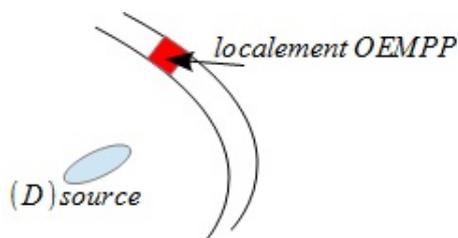
Intéressons nous à la partie $f(x - ct)$ de $s(x, t)$:
 $f(x + \Delta x - c(t + \Delta t)) = f(x - ct)$ si $\Delta x = c\Delta t$.

La grandeur f se propage à la célérité c vers les x croissants sans déformation.

On parlera pour f d'onde **plane progressive OEMPP**

FIGURE 7.1 – Onde plane progressive

$g(x + ct)$ est aussi une OEMPP mais elle se propage vers les x décroissants - donc en sens inverse de $f(x - ct)$ -. Nous verrons plus loin d'autres types de solutions que les OEMPP.



Rem : en réalité la source de l'onde étant forcément d'extension finie, le modèle de l'onde plane ne sera valide que localement et loin des sources.

FIGURE 7.2 – Onde localement plane progressive

Structure de l'OEMPP

7.1.3 Onde sphérique

7.1.4 Distribution en fréquence

Le spectre visible

A chaque couleur du spectre visible, on peut associer une longueur d'onde dans le vide λ par la relation

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (7.1)$$

Par exemple pour le jaune $\lambda_J = 600nm$ donc $\nu_J = 5.10^{14}Hz$.

Le domaine visible s'étend du violet au rouge soit $\lambda_V = 400nm \leq \lambda \leq \lambda_R = 800nm$ et en fréquences $\nu_V = 8.10^{14}Hz \geq \nu \geq \nu_R = 4.10^{14}Hz$

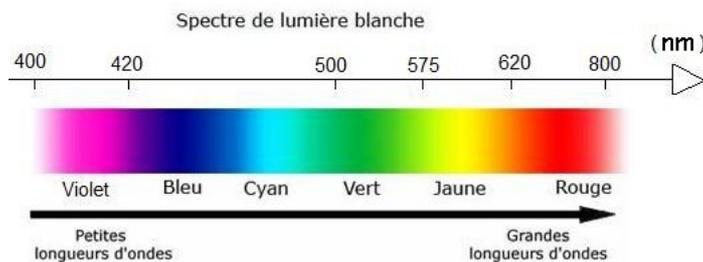


FIGURE 7.3 – Spectre visible

Divers domaines du spectre électromagnétique

- Ondes hertziennes : à partir de $0.1mm$ et sans limite supérieure (radio, télé, radars...)
- Infrarouge IR : de $800nm$ à $300\mu m$. Ils sont produits par les corps chauffés - rayonnement thermique -. Par exemple à $300K$, le rayonnement émis est à $10\mu m$
- Visible : de $400nm$ à $800nm$. Nous avons déjà décrit ce domaine au paragraphe précédent.
- Ultraviolet UV : de $10nm$ à $400nm$. Ils sont produits par des émissions atomiques plus énergétiques que celles de la lumière visible.
- Rayons X : de $20pm$ à $10nm$. On remarque que λ est de l'ordre de la distance inter atomique. Ils seront diffractés par la matière d'où leur intérêt pour l'étude des structures atomiques. Ils sont aussi produits par des transitions électroniques mais plus énergétiques que pour les UV.
- Rayons γ : en dessous de $20pm$. Ils sont très énergétiques. Ils sont produits lors de la désintégration radioactive des noyaux des atomes ou par d'autres processus nucléaires ou par rayonnement cosmique.

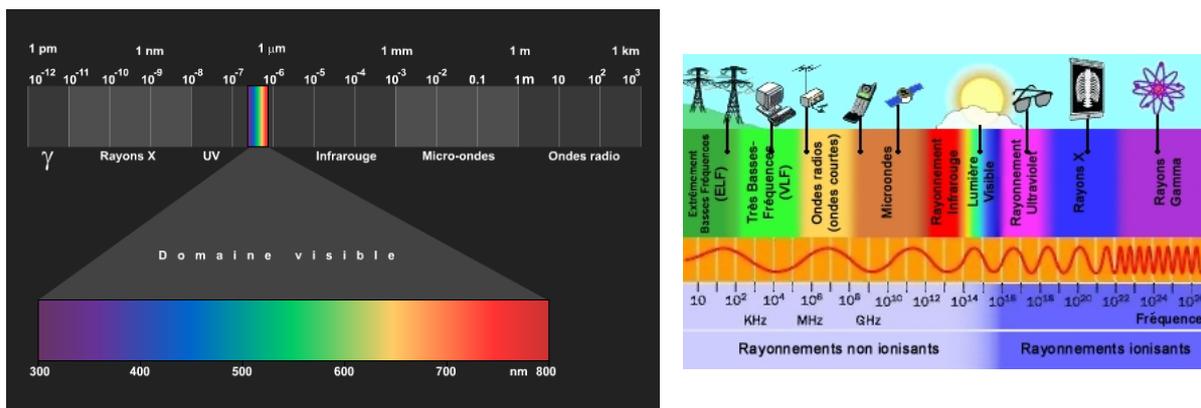


FIGURE 7.4 – Spectre ondes électromagnétiques

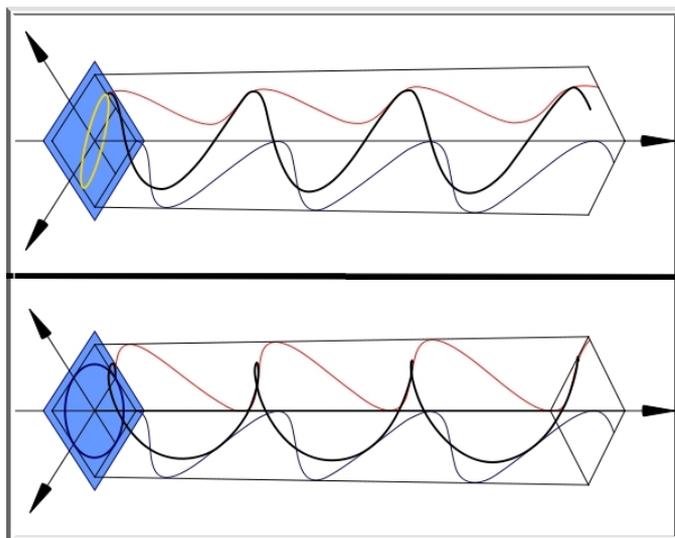
7.2 Ondes planes monochromatiques ou harmoniques

7.3 Représentation complexe du champ électromagnétique

7.4 Énergie transportée par une onde électromagnétique

7.5 Polarisation

7.5.1 Définition



Une OEMPPH est dite polarisée si l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit au cours du temps une courbe fermée bien définie

Pour la description, on se placera dans le plan $x = 0$ en regardant les diverses positions de \vec{E} au cours du temps.

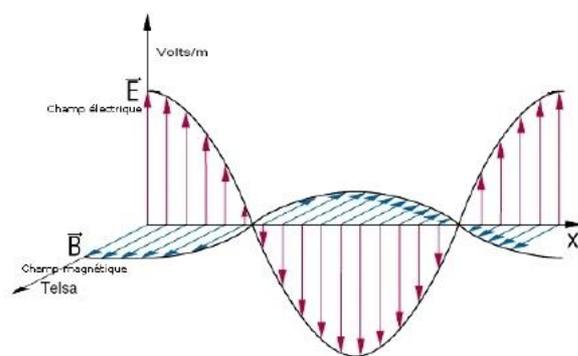
FIGURE 7.5 – Polarisation circulaire et elliptique

Par un choix judicieux de l'origine des temps, on pourra écrire \vec{E} sous la forme

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= E_{0y} \cos(kx - \omega t) \\ E_z &= E_{0z} \cos(kx - \omega t - \varphi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} \quad (7.2)$$

7.5.2 Polarisation de l'OEMPPH

Polarisation rectiligne

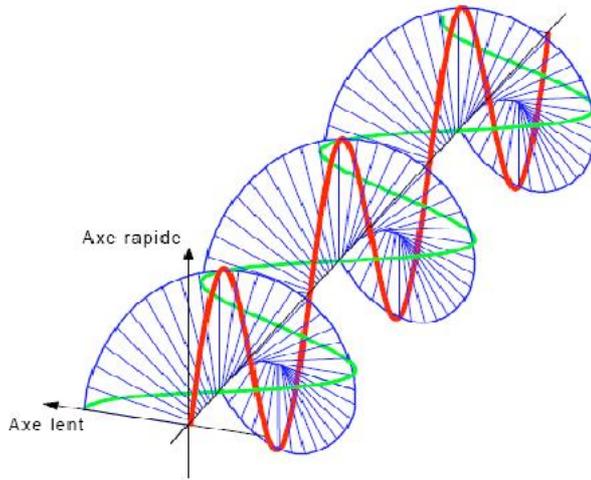


Si $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, la courbe décrite est une droite. \vec{E} et \vec{B} gardent une direction fixe.

FIGURE 7.6 – Polarisation rectiligne

Cette direction n'est pas nécessairement celle représentée sur le schéma ci-contre. Elle est donnée par $\tan \alpha = \frac{E_{0z}}{E_{0y}}$ ce qui est facile à redémontrer.

Polarisation elliptique



Si $\varphi \neq p\pi$ avec p entier, la courbe décrite est une ellipse. Montrons le :

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos \omega t$$

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$$

Soit $\sin \omega t \sin \varphi = \frac{E_z}{E_{0z}} - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \varphi$. En éliminant le temps :

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)\cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (7.3)$$

FIGURE 7.7 – Polarisation elliptique

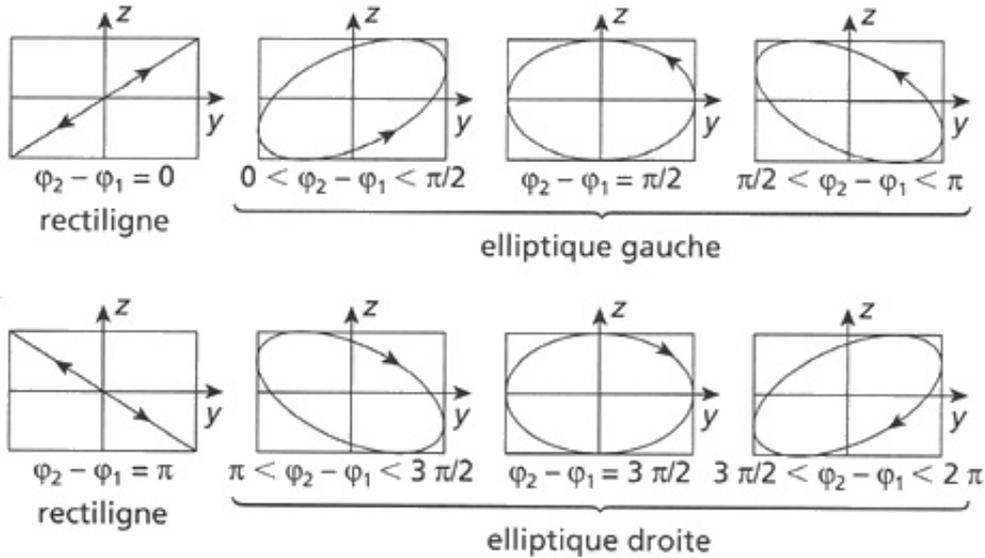


FIGURE 7.8 – Divers états de polarisation - Sens de parcours des ellipses

Pour obtenir le sens de rotation de l'extrémité de \vec{E} sur l'ellipse, on se place à $t = 0$. A cet instant $E_y = E_{0y}$ est maximal et $\frac{dE_z}{dt} = \omega E_{0z} \sin \varphi$. Le signe de $\sin \varphi$ fixe le sens de rotation.

Rem : Notons qu'une onde polarisée elliptiquement peut être représentée comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement dans des directions orthogonales.

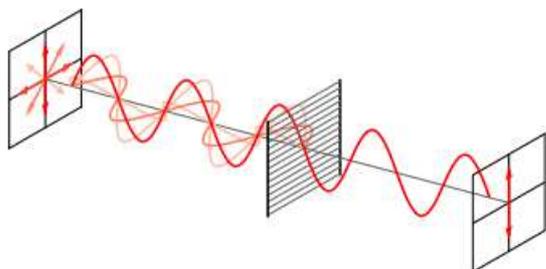
Polarisation circulaire

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ et que $E_{0y} = E_{0z}$, on a une polarisation circulaire.

Rem : la superposition de deux ondes polarisées circulairement de même amplitude et de sens contraires donne une onde polarisée rectilignement.

7.5.3 Polariseurs - Loi de Malus

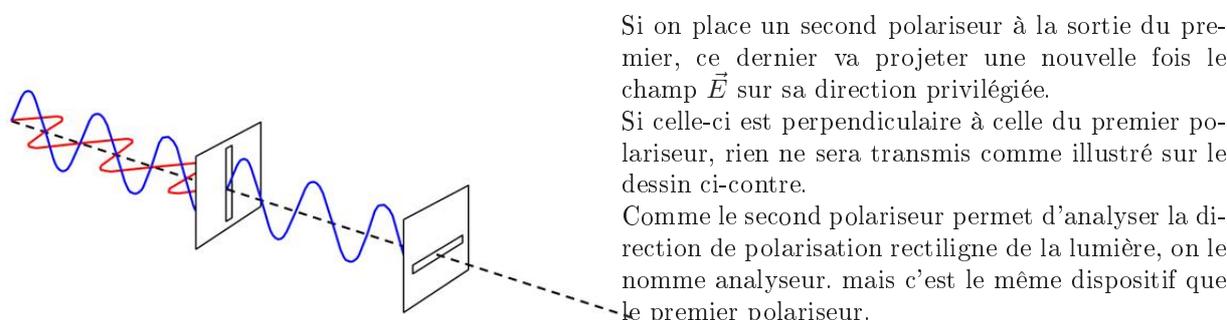
La lumière naturelle - soleil, lampes...- n'est pas polarisée. Nous pouvons garder la représentation en deux ondes polarisées rectilignement orthogonales mais la phase φ varie aléatoirement. Nous sommes donc dans aucun des cas envisagés précédemment.



Il existe des dispositifs optiques constitués généralement d'un film polaroïd appelés polariseurs tels qu'à leur traversée apparaît un état de polarisation rectiligne parallèle à leurs direction privilégiée.

En fait le polaroïd est constitué molécules longues suivant une direction et courtes dans la direction perpendiculaire : ces dernières vont absorber le champ \vec{E} quand il est parallèle à la grande longueur des molécules du film.

FIGURE 7.9 – Polariseur

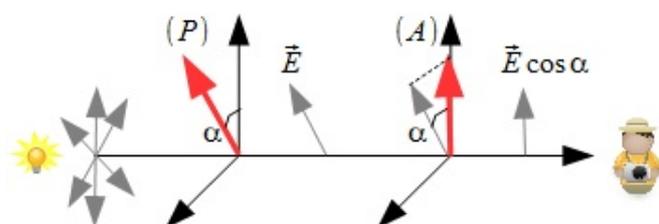


Si on place un second polariseur à la sortie du premier, ce dernier va projeter une nouvelle fois le champ \vec{E} sur sa direction privilégiée.

Si celle-ci est perpendiculaire à celle du premier polariseur, rien ne sera transmis comme illustré sur le dessin ci-contre.

Comme le second polariseur permet d'analyser la direction de polarisation rectiligne de la lumière, on le nomme analyseur. mais c'est le même dispositif que le premier polariseur.

FIGURE 7.10 – Polariseur et analyseur



Soient I_0 l'intensité énergétique avant (A) et I celle après (A). Sachant qu'elle sont proportionnelles au carré du champ électrique, nous obtenons la loi de Malus

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \quad (7.4)$$

FIGURE 7.11 – Loi de Malus

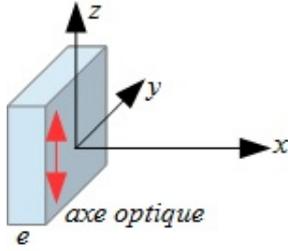
Si $\alpha = 0$, I est maximum. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $I = 0$ il y a extinction. Notons qu'abstraction faite du $\cos^2 \alpha$, un analyseur comme un polariseur absorbe une partie importante de l'énergie.

7.5.4 Lames à retard

Généralités

Soit une lame mince taillée dans un cristal anisotrope. Cette lame à face parallèle d'épaisseur e va agir sur l'état de polarisation de la lumière.

En effet un cristal uniaxe possède la symétrie de révolution autour d'un axe optique. Cet axe sera parallèle à la face d'entrée.



Si on envoie une onde polarisée rectilignement
 — suivant Oy , la lame présente l'indice n_0 dit ordinaire
 — suivant Oz , la lame présente l'indice n_e dit extraordinaire. Oz est l'axe optique de la lame

FIGURE 7.12 – Cristal uniaxe

Les composantes de \vec{E} s'écrivent à l'entrée et à la sortie de la lame :

$$\vec{E}_i = \begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= E_{0y} \cos(kx - \omega t) \\ E_z &= E_{0z} \cos(kx - \omega t - \varphi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{E}_s = \begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= E_{0y} \cos(kx - \omega t - \frac{n_0 e \omega}{c}) \\ E_z &= E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi - \frac{n_e e \omega}{c}) \end{cases} \quad (7.5)$$

La lame introduit donc un déphasage supplémentaire ψ entre les deux composantes du champ électrique. On aura

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_0) e \quad (7.6)$$

Une onde polarisée rectilignement ressortira donc en général polarisée elliptiquement sauf si elle est sur les lignes neutres de la lame à savoir Oy et Oz .

Lame quart d'onde

Nous choisissons ici pour λ donné une épaisseur e telle que $\psi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \delta = \frac{2\pi}{\psi} = \frac{\lambda}{4}$

Une onde polarisée rectilignement ressortira polarisée elliptiquement, les axes de l'ellipse étant les lignes neutres de la lame.



Si la polarisation rectiligne incidente est sur les bissectrices des lignes neutres de la lame, la polarisation en sortie sera circulaire.

Bien sûr, si on envoie une onde polarisée circulairement, elle ressortira polarisée rectilignement sur les bissectrices des lignes neutres de la lame.

Lame demi-onde

Nous choisissons ici pour λ donné une épaisseur e telle que $\psi = \pi \Leftrightarrow \delta = \frac{2\pi}{\psi} = \frac{\lambda}{2}$

Une onde polarisée rectilignement ressortira polarisée rectilignement dans une direction symétrique de la direction incidente par rapport aux lignes neutres de la lame.

Chapitre 8

Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma - Dispersion

8.1 Rappels sur la propagation d'une OEMPPH dans le vide

8.2 Modélisation d'un plasma

8.3 Phénomène de dispersion

8.3.1 Groupe d'onde

8.3.2 Vitesse de phase

8.3.3 Dispersion

Un milieu sera **dispersif** si la vitesse de phase est une fonction de la pulsation : $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$.

En effet, si les vitesses de phase diffèrent suivant les pulsations, un paquet d'onde va avoir tendance à s'étaler au fur et à mesure de la propagation. C'est ce qu'on appelle la dispersion.

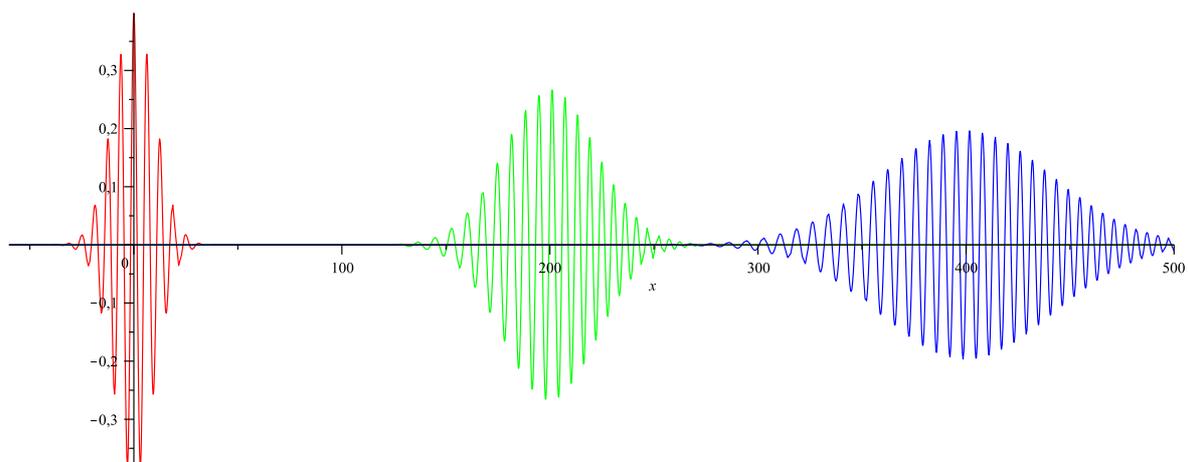


FIGURE 8.1 – Etalement d'un paquet d'onde

Chapitre 9

Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique - Réflexion sur un métal parfait

9.1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique

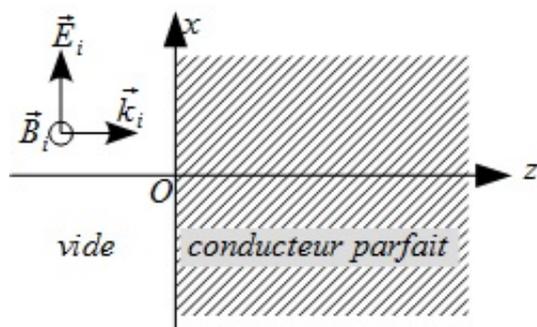
9.2 Modèle du conducteur parfait

9.3 Réflexion d'une onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur parfait

9.3.1 Position du problème

Soit une OEMPPH polarisée rectilignement suivant Ox tombant sur un conducteur parfait. On notera $[\vec{E}_i, \vec{B}_i]$ le champ électromagnétique incident.

Comme le conducteur est parfait, sa conductivité est infinie mais il existe toutefois une densité superficielle de charges σ .

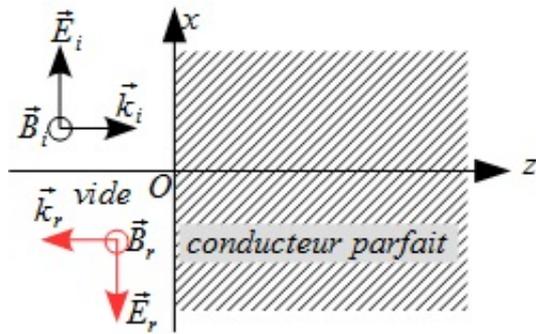


Le champ incident \vec{E}_i met en mouvement les électrons de la surface du conducteur. Ceux-ci engendrent un courant induit qui s'oppose par ses effets à la pénétration de l'onde dans le conducteur -loi de Lenz-. Les électrons oscillants autour des charges positives seront assimilés à des dipôles rayonnant un champ électromagnétique dans tout l'espace - voir le chapitre suivant - :

- zone $z > 0$: cette OEM va interférer avec l'onde incidente pour que le champ total soit nul. En effet dans un conducteur parfait en régime variable $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{int} = \vec{0}$.
- zone $z < 0$: cette OEM constitue le champ électromagnétique réfléchi $[\vec{E}_r, \vec{B}_r]$

FIGURE 9.1 – Réflexion sur un conducteur parfait

9.3.2 Structure de l'onde réfléchi



Au bilan le champ électromagnétique réfléchi s'écrit en utilisant la relation de structure de l'OEMPP :

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{-i(kz + \omega t)} \vec{e}_x \quad (9.1)$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{E_0}{c} e^{-i(kz + \omega t)} \vec{e}_y \quad (9.2)$$

$$\vec{k}_r = -k\vec{e}_z = -\frac{\omega}{c}\vec{e}_z \quad (9.3)$$

FIGURE 9.2 – Réflexion sur un conducteur parfait

9.3.3 Structure de l'onde résultante : onde stationnaire

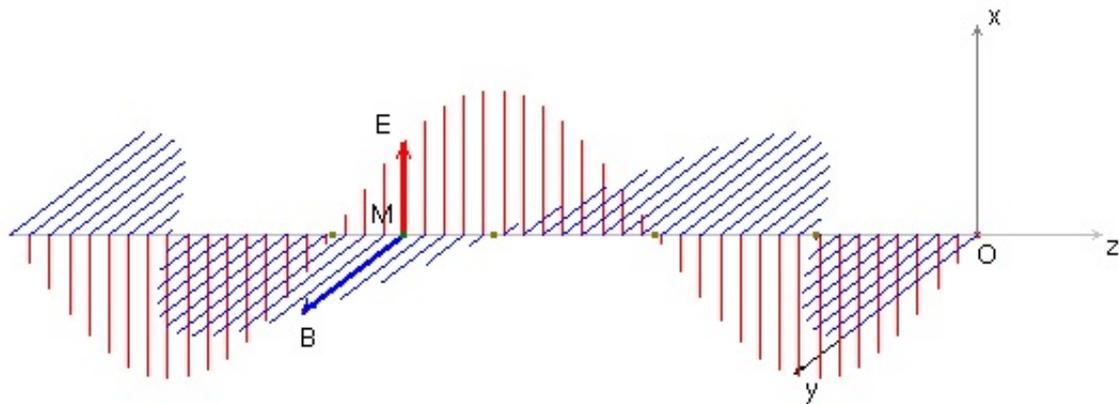


FIGURE 9.3 – Structure de l'onde stationnaire

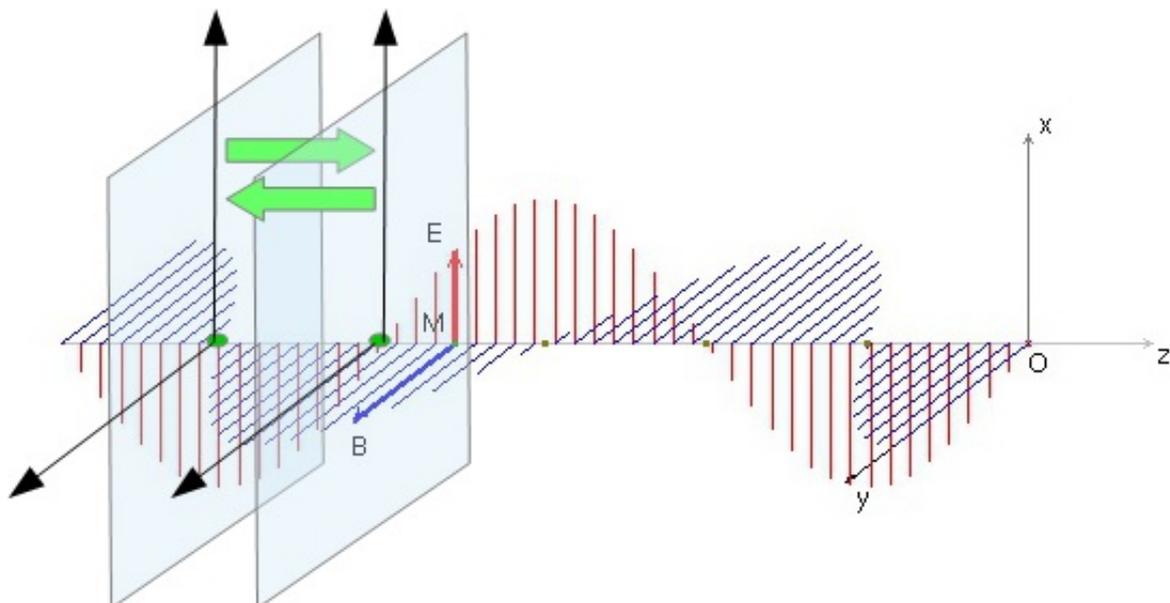
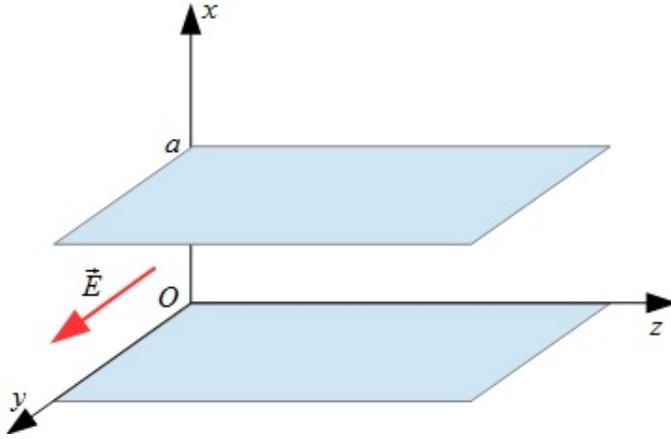


FIGURE 9.4 – Energie électromagnétique piégée entre deux plans nodaux de \vec{B}

9.3.4 Pression de radiation

9.3.5 Propagation entre deux plans conducteurs parfaits parallèles



On s'intéresse ici à la propagation d'un champ électrique $\vec{E} = E_{0y}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}\vec{e}_y$ entre deux plans conducteurs parfaits parallèles. Le champ \vec{E} est donc parallèle aux deux plans conducteurs. **On ne suppose pas que nous avons une onde plane ici.**

Rem : ce mode est appelé mode transverse électrique (TE) car \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation \vec{e}_z

FIGURE 9.5 – Propagation entre deux plans conducteurs parfaits parallèles

9.3.6 Dispersion et coupure des divers modes

En injectant la condition de quantification $k_c = \frac{n\pi}{a}$ dans la relation de dispersion, nous avons

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Leftrightarrow \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{n\pi c}{a} \quad (9.4)$$

Nous avons là encore trois cas à envisager :

- si $\omega < \omega_c$ alors $k^2 < 0$ et k est imaginaire pur. Cela conduit à une solution de la forme

$$\vec{E} = E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-\sqrt{-k^2}z} \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad (9.5)$$

Nous reconnaissons ici une onde évanescente : elle ne se propage et est très vite amortie. Sa pulsation est trop basse et sa longueur d'onde trop grande pour se propager entre les deux conducteurs.

- si $\omega \gg \omega_c$ alors $k \simeq \frac{\omega}{c}$. L'onde se propage sans déformation comme si elle était dans le vide. Sa longueur d'onde est si petite que les plaques conductrices paraissent infiniment loin l'une de l'autre : elles n'imposent aucune contrainte à l'onde qui semble se propager en milieu libre -comme dans le vide -.

- si $\omega > \omega_c$ alors $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$. Nous avons une vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} > c \quad (9.6)$$

Elle dépend de ω : il y a donc dispersion. l'onde va se propager avec déformation à cause des contraintes imposées par les deux conducteurs. La vitesse de phase est supérieure à c mais ça n'a aucune importance puisqu'elle ne représente pas la vitesse d'une grandeur physique -simplement celle d'une des composantes de Fourier d'une onde réelle-.

La vitesse de groupe s'obtient en différentiant la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_c^2}{c^2} \Rightarrow 2kdk = \frac{2\omega}{c^2}d\omega \Leftrightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad (9.7)$$

Alors nous obtenons l'expression suivante pour la vitesse de groupe

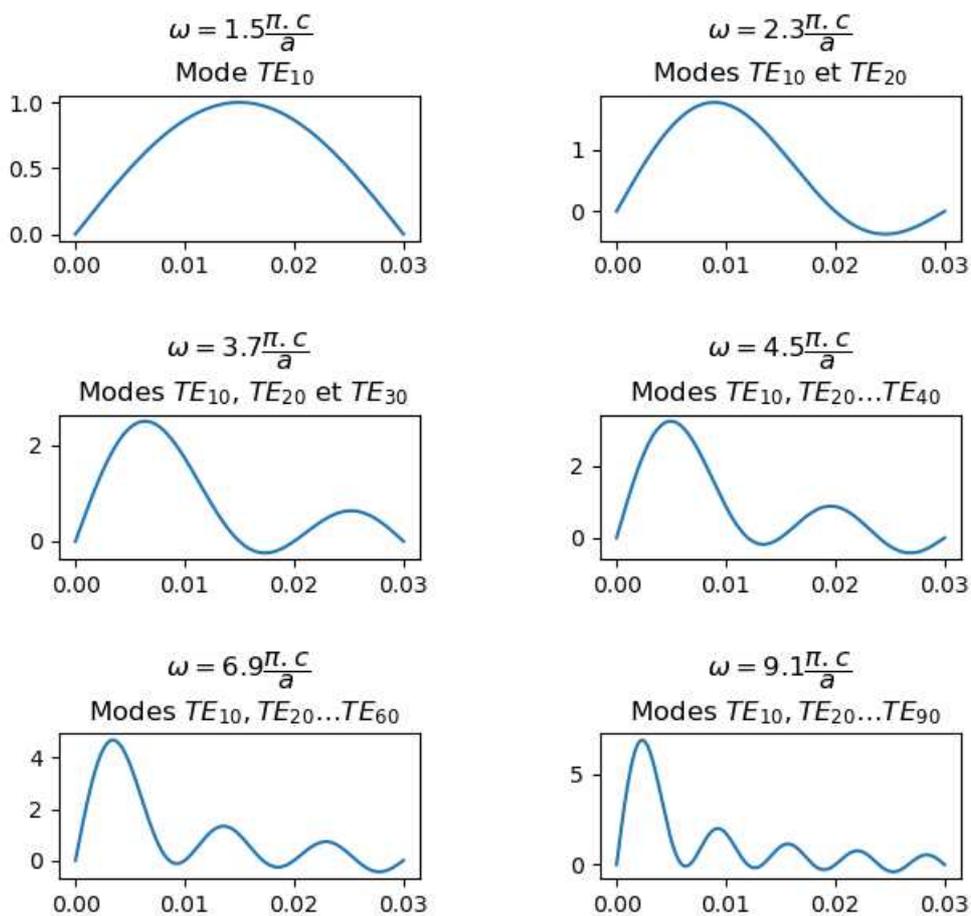
$$v_{\varphi} = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} < c \quad (9.8)$$

Elle est bien inférieure à c : ouf!

Suivant la fréquence, l'onde incidente va se propager sur divers modes :

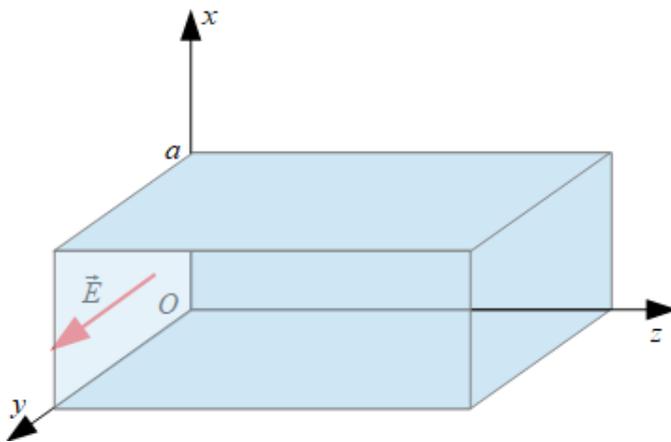
ω en $rad.s^{-1}$	$\omega_{c_1} = \frac{\pi c}{a} = 10^3$	$\omega_{c_2} = \frac{2\pi c}{a} = 2.10^3$	$\omega_{c_3} = \frac{3\pi c}{a} = 3.10^3$
$\omega = 100$			
$\omega = 1.5.10^3$			
$\omega = 2.5.10^3$			
$\omega = 3.5.10^3$			

Modes actifs d'une cavité suivant la pulsation ω de l'OEM



9.3.7 Guide d'onde complet

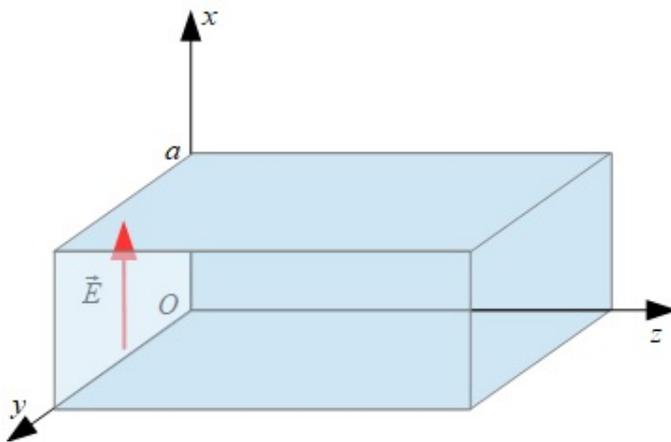
Modes TE_{n0}



On s'intéresse ici à la propagation d'un champ électrique $\vec{E} = \underline{E_{0y}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_y$ dans un guide d'onde constitué de plans conducteurs parfaits parallèles. Le champ \vec{E} est donc parallèle à deux plans conducteurs et perpendiculaire à deux autres. **On ne suppose pas que nous avons une onde plane ici.**

FIGURE 9.6 – Propagation dans un guide d'onde

Modes TE_{0n}



On s'intéresse ici à la propagation d'un champ électrique $\vec{E} = \underline{E_{0y}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_x$ dans un guide d'onde constitué de plans conducteurs parfaits parallèles. Le champ \vec{E} est donc parallèle à deux plans conducteurs et perpendiculaire à deux autres. **On ne suppose pas que nous avons une onde plane ici.**

FIGURE 9.7 – Propagation dans un guide d'onde

Le problème est le même que précédemment mais avec une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Modes TE_{mn} (Hors programme)

On ne suppose plus que \vec{E} soit parallèle à une des plaques. En projetant, on se rend bien compte que la solution va être une superposition de modes TE_{n0} et TE_{0n} .

Dans le cas général, nous pouvons écrire :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = \underline{E_{0x}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} \\ E_y = \underline{E_{0y}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} \\ E_z = \underline{E_{0z}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} \end{cases} \quad (9.9)$$

et

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = \underline{B_{0x}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} \\ B_y = \underline{B_{0y}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} \\ B_z = \underline{B_{0z}}(x, y)e^{i(kz-\omega t)} \end{cases} \quad (9.10)$$

Les équations de Maxwell donnent les 8 équations suivantes :

1. (MG) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + ikE_z = 0$
2. (MT) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + ikB_z = 0$
3. (MF) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ sur } \vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\omega B_x$
4. (MF) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ sur } \vec{e}_y \Rightarrow -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ikE_x = i\omega B_y$
5. (MF) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ sur } \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z$
6. (MA) $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ sur } \vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega E_x$
7. (MA) $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ sur } \vec{e}_y \Rightarrow -\frac{\partial B_z}{\partial x} + ikB_x = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega E_y$
8. (MA) $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ sur } \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega E_z$

Il est donc possible d'exprimer E_x, E_y, B_x et B_y en fonction de E_z et B_z :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\ E_y = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ E_z = \underline{E_{0z}}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \end{cases} \quad (9.11)$$

et

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left(-\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + k \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ B_y = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left(\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + k \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\ B_z = \underline{B_{0z}}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \end{cases} \quad (9.12)$$

Comme nous étudions ici le mode TE , $E_z = 0$ et les expressions se simplifient en :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ E_y = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (9.13)$$

et

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = \frac{ik}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ B_y = \frac{ik}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ B_z = \underline{B_{0z}}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \end{cases} \quad (9.14)$$

Le champ magnétique \vec{B} obéit comme précédemment à l'équation de propagation dans le vide

$$\square^2 \vec{B} = \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (9.15)$$

En injectant l'expression de \vec{B} dans l'équation de propagation et en projetant sur \vec{e}_z , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \underline{B_{0z}}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{B_{0z}}(x, y)}{\partial y^2} + k_c^2 \underline{B_{0z}}(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (9.16)$$

Cherchons la solution sous la forme $\underline{B_{0z}}(x, y) = f(x).g(y)$ et séparons les variables. Il vient :

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} = k_c^2 + \frac{g''(y)}{g(y)} = C^2 \quad (9.17)$$

Nous avons pris une constante positive car nous avons montré précédemment que seule une solution harmonique peut satisfaire aux conditions aux limites.

Pour la variable x , la solution est $f(x) = A \cos(Cx) + B \sin(Cx)$.

Les conditions aux limites en imposent que $E_y(0) = E_y(a) = 0$. Or $E_y = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}$. Donc $\frac{\partial B_z}{\partial x}(0) = \frac{\partial B_z}{\partial x}(a) = 0$ ce qui donne que $B = 0$ et $C = \frac{n\pi}{a}$. La solution est donc $f(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$.

Pour la variable y , la solution est $g(y) = D \cos(Fy) + H \sin(Fy)$ avec $F = \sqrt{k_c^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$.

Les conditions aux limites en imposent que $E_x(0) = E_x(b) = 0$. Or $E_x = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial y}$. Donc $\frac{\partial B_z}{\partial y}(0) = \frac{\partial B_z}{\partial y}(b) = 0$ ce qui donne que $H = 0$ et $F = \frac{m\pi}{b}$. La solution est donc $g(y) = D \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$.

Nous obtenons donc en parties réelles la solution complète suivante :

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(kz - \omega t) \quad (9.18)$$

Il est alors facile d'en déduire les autres composantes de \vec{E} et \vec{B} grâce aux relations trouvées par les équations de Maxwell.

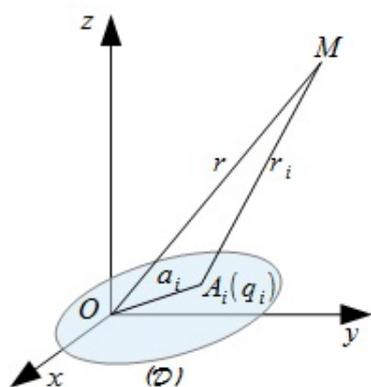
La nouvelle relation de dispersion est :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \quad \text{avec} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2 c^2}{b^2}} \quad (9.19)$$

Chapitre 10

Rayonnement d'un dipôle oscillant

10.1 Approximation dipolaire



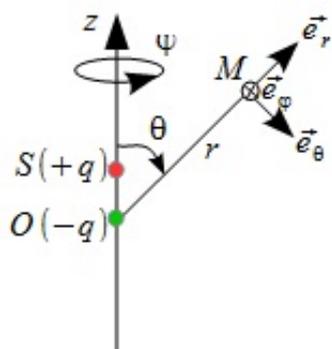
Soit une distribution de charges (\mathcal{D}) constituées de charges q_i placées en des points A_i mobiles au voisinage de l'origine O . Les charges sont dans un volume confiné.

On cherche une expression approchée des potentiels $[v(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)]$ créés par (\mathcal{D}) en un point M fixe et éloigné de O .

On supposera donc que $\forall A_i \in (\mathcal{D}) \quad r \gg a_i$ où $a_i = OA_i$ et $r = OM$.

FIGURE 10.1 – Distribution de charges rayonnant un champ électromagnétique

10.2 Modèle du dipôle oscillant



Le moment dipolaire vaut

$$\vec{p} = q\vec{OS} = qz_0 \cos \omega t \vec{e}_z \quad (10.1)$$

Nous nous placerons en coordonnées sphériques. L'approximation dipolaire vue au paragraphe précédent s'écrit ici :

- M est loin du dipôle soit $r \gg z_0$
- les charges sont non relativistes soit $\dot{z} \ll c$ ou encore $z_0 \ll \lambda$.

FIGURE 10.2 – Modèle du dipôle oscillant

10.3 Le champ électromagnétique rayonné

10.3.1 Calcul des champs \vec{E} et \vec{B} (hors programme)

10.3.2 Zones de rayonnement

10.3.3 Structure du champ rayonné

10.4 Puissance rayonnée par le dipôle oscillant

10.4.1 Vecteur de Poynting

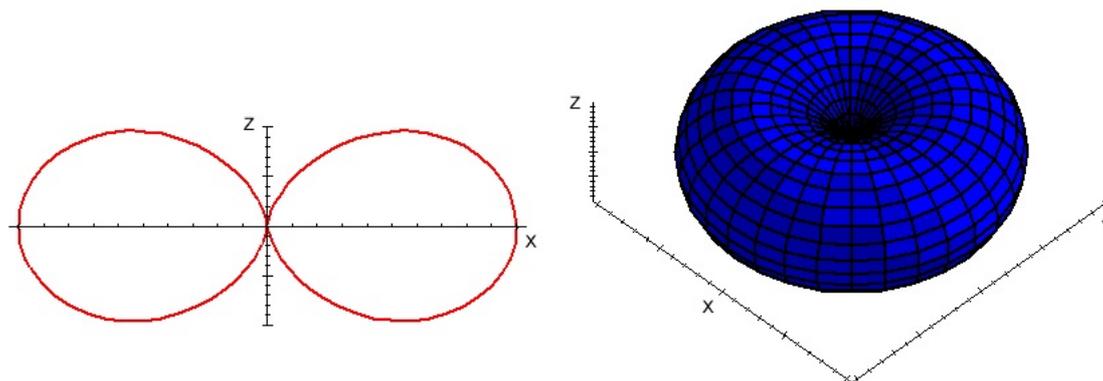


FIGURE 10.3 – Intensité énergétique émise par un dipôle oscillant

10.4.2 Puissance rayonnée dans tout l'espace

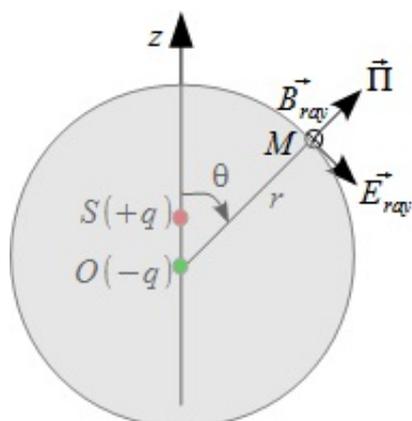


FIGURE 10.4 – Puissance rayonnée à travers une sphère

10.4.3 Généralisation